ĐOÀN TRÍ DŨNG - HÀ HỮU HẢI
(TEAM CASIO MEN)
SỐ MỘT VỀ TÀI LIỆU CASIO



KÍNH LÚP TABLE

TẬP 2: CHIA ĐA THỨC CHỨA NHIỀU CĂN

Tài liệu tham khảo cho các em học sinh 10, 11, 12
Tài liệu ôn thi Trung học phổ thông Quốc gia
Tài liệu tham khảo cho các thầy, cô giáo



CASIO
BOOKSTORE

HTTPS://WWW.FACEBOOK.COM/GROUPS/CASIOMEN/

LỜI NÓI ĐẦU

Những năm gần đây, với sự phát triển của máy tính CASIO, các bài toán phương trình vô tỷ, bất phương trình, hệ phương trình đã được biến tấu rất nhiều nảy sinh các dạng toán khó và vô cùng đa dạng, phong phú, trong đó nổi hơn cả là phương pháp ép căn đưa về nhân tử.

Với các kỹ thuật đã và đang có hiện nay, kỹ thuật ép một căn đã không còn quá xa lạ, tuy nhiên kỹ thuật chia đa thức chứa nhiều căn vẫn là một ẩn số, thách thức với không ít các bạn trẻ.

Trong tác phẩm này, TEAM CASIO MEN chúng tôi xin giới thiệu với các bạn đọc một tuyệt phẩm về chia đa thức chứa nhiều căn, hy vọng tác phẩm này sẽ giúp bạn đọc có được những cái nhìn mới sâu sắc về CASIO và uy lực của nó.

CASIO MEN là Team Mạnh Nhất hiện nay của Việt Nam trong lĩnh vực tài liệu về CASIO, thay mặt Team, kính chúc các thầy cô, các em học sinh có được những giây phút thư giãn, vui vẻ và đặt một bước chân lớn hơn trong thế giới về CASIO.

Xin chân thành cảm ơn.

TRƯỞNG NHÓM CASIO MEN

THÁM TỬ CASIO – CASIO MAN – ĐOÀN TRÍ DŨNG

CHỦ ĐỀ 1: 2 NGHIỆM ĐƠN HỮU TỶ

VÍ DỤ 1: Giải phương trình:

$$3x^2+2x+1-(x^2+x-2)\sqrt{x+2}-(x^2+x+1)\sqrt{3-x}-\sqrt{6+x-x^2}=0$$

<u>KÍNH LÚP TABLE:</u>

Sử dụng TABLE với:

$$F(x)=3x^2+2x+1-(x^2+x-2)\sqrt{x+2}$$
$$-(x^2+x+1)\sqrt{3-x}-\sqrt{6+x-x^2}$$

Ta thu được 2 nghiệm đơn $x=-1, x=2$

	X	F(X)
2	-1.5	0.4215
3	-1	0
4	-0.5	-0.188

-0.5

	X	F(X)
8	1.5	-0.632
9	2	0
10	2.5	2.0367

2.5

Giả sử nhân tử có dạng $\sqrt{x+2}+a\sqrt{3-x}+b=0$. Khi đó ta giải hệ:

$$\begin{cases}\sqrt{x+2}+a\sqrt{3-x}+b=0, x=-1\\ \sqrt{x+2}+a\sqrt{3-x}+b=0, x=2\end{cases}\Rightarrow a=1, b=-3$$

Vậy nhân tử của phương trình có dạng: $\left(3-\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}\right)$.

Xét $A=\dfrac{3x^2+2x+1-(x^2+x-2)\sqrt{x+2}-(x^2+x+1)\sqrt{3-x}-\sqrt{6+x-x^2}}{3-\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}}$ CALC 3 được kết quả là $13+\sqrt{5}$. Vậy A chứa $\sqrt{x+2}$.

Xét $A-\sqrt{x+2}$ CALC 1000 được kết quả 1001001 = x^2+x+1. Vậy:

$$A-\sqrt{x+2}=x^2+x+1 \Leftrightarrow A=\sqrt{x+2}+x^2+x+1$$

<u>BÀI GIẢI:</u>

Điều kiện xác định: $-2\le x\le 3$.

Ta có: $3x^2+2x+1-(x^2+x-2)\sqrt{x+2}-(x^2+x+1)\sqrt{3-x}-\sqrt{6+x-x^2}=0$

$\Leftrightarrow\left(3-\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}\right)\left(\sqrt{x+2}+x^2+x+1\right)$.

CHỦ ĐỀ 2: NGHIỆM VÔ TỶ

VÍ DỤ 1: Giải phương trình:

$$5x-6+5\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-1}=0$$

KÍNH LÚP TABLE:

Sử dụng TABLE với: $F(x)=5x-6+5\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-1}$ Nhận xét: Có nghiệm nằm trong $(1;1.1)$.	X, F(X): 1.1 → 1.5393; 1.2 → 2.8993; 1.1
SHIFT CALC với $x=1.05$ ta được nghiệm vô tỷ.	5X−6+5√(X−1)+√(X²−▸ X= 1.019708848 L−R= 0
Tính $\sqrt{x-1}$ và gán giá trị vào biến A.	√(X−1)→A 0.1403882032
Tính $\sqrt{x+1}$ và gán giá trị vào biến B.	√(X+1)→B 1.42116461
Sử dụng TABLE với $F(x)=AX+B$ và tìm giá trị nguyên ta được $X=-3$. Như vậy: $-3A+B=1 \Leftrightarrow 3A-B+1=0$. Nhận xét: Nhân tử của phương trình là: $\left(3\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}+1\right)$	f(X)=AX+B X, F(X): −4 → 0.8596; −3 → 1; −2 → 1.1403; 1

Xét $A=\dfrac{5x-6+5\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-1}}{3\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}+1}$ CALC 1 được kết quả $1+\sqrt{2}$. Như vậy A chứa $\sqrt{1+x}$

Xét $A-\sqrt{1+x}$ CALC 3 được $1+2\sqrt{2}$ như vậy $A-\sqrt{1+x}$ chứa $2\sqrt{x-1}$.

Xét $A-\sqrt{1+x}-2\sqrt{x-1}$ CALC 1000 được kết quả là 1. Như vậy $A-\sqrt{1+x}-2\sqrt{x-1}=1$.

Hay nói cách khác: $A=\sqrt{1+x}+2\sqrt{x-1}+1$.

BÀI GIẢI:

Điều kiện xác định: $x\ge 1$.

Ta có: $5x-6+5\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-1}=0$

$\Leftrightarrow \left(3\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+2\sqrt{x-1}+1\right)=0$

CHỦ ĐỀ 3: NGHIỆM KÉP HỮU TỶ THAY VÀO CĂN HỮU TỶ

VÍ DỤ 1: Giải phương trình:

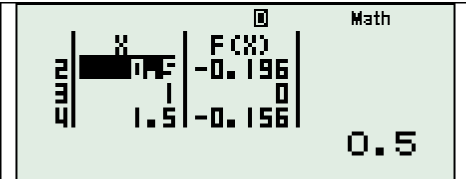
$$3x^2-3x-9-2\left(x^2-2\right)\sqrt{x+3}+\left(x^2+4\right)\sqrt{x}=0$$

KÍNH LÚP TABLE:

Sử dụng TABLE với:

$F(x)=3x^2-3x-9-2\left(x^2-2\right)\sqrt{x+3}+\left(x^2+4\right)\sqrt{x}$

Nhận xét: Nghiệm kép $x=1$



Giả sử nhân tử có dạng: $\sqrt{x}+a\sqrt{x+3}+b=0$. Khi đó giải hệ:

$$\begin{cases}\sqrt{x}+a\sqrt{x+3}+b=0,x=1\\ \left(\sqrt{x}+a\sqrt{x+3}+b\right)'=0,x=1\end{cases}\Rightarrow a=-2,b=3$$

Vậy nhân tử có dạng: $\left(\sqrt{x}-2\sqrt{x+3}+3\right)$.

Xét $A=\dfrac{3x^2-3x-9-2\left(x^2-2\right)\sqrt{x+3}+\left(x^2+4\right)\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2\sqrt{x+3}+3}$ CALC 0 ta thu được kết quả là $1+2\sqrt{3}$, như vậy A có chứa $2\sqrt{x+3}$.

Xét $A-2\sqrt{x+3}$ CALC 2 ta thu được kết quả $5+\sqrt{2}$, như vậy $A-2\sqrt{x+3}$ có chứa $\sqrt{x}$

Xét $A-2\sqrt{x+3}-\sqrt{x}$ CALC 1000 được kết quả 1000001 = x^2+1. Vậy:

$$A-2\sqrt{x+3}-\sqrt{x}=x^2+1\Leftrightarrow A=x^2+1+2\sqrt{x+3}+\sqrt{x}$$

BÀI GIẢI:

Điều kiện xác định: $x\geq 0$.

Ta có: $3x^2-3x-9-2\left(x^2-2\right)\sqrt{x+3}+\left(x^2+4\right)\sqrt{x}=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-2\sqrt{x+3}+3\right)\left(x^2+1+2\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)=0$

CHỦ ĐỀ 4: NGHIỆM KÉP HỮU TỶ THAY VÀO CĂN VÔ TỶ

VÍ DỤ 1: Giải phương trình:

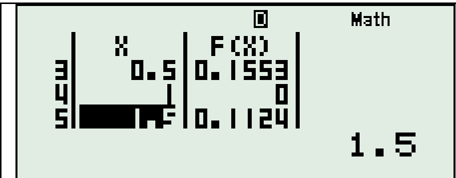
$$3x+3-2\sqrt{2x^2+5x+2}+2\left(\sqrt{x+2}\right)^3-(x+5)\sqrt{2x+1}=0$$

KÍNH LÚP TABLE:

Sử dụng TABLE với:

$$F(x)=3x+3-2\sqrt{2x^2+5x+2}+2\left(\sqrt{x+2}\right)^3$$
$$-(x+5)\sqrt{2x+1}$$

Nhận xét: Nghiệm kép $x=1$



Với $x=1$, ta có $\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+1}=\sqrt{3}$. Do đó nhân tử có dạng: $\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\right)^2$.

Xét $A=\dfrac{3x+3-2\sqrt{2x^2+5x+2}+2\left(\sqrt{x+2}\right)^3-(x+5)\sqrt{2x+1}}{\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\right)^2}$ CALC 0 được kết quả là $2+2\sqrt{2}$, vậy A có chứa $2\sqrt{x+2}$.

Xét $A-2\sqrt{x+2}$ CALC 1 được $1+\sqrt{3}$ do đó $A-2\sqrt{x+2}$ chứa $\sqrt{2x+1}$.

Xét $A-2\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}$ CALC 1000 được kết quả là 1. Vậy:

$$A-2\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}=1\Leftrightarrow A=2\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}+1$$

BÀI GIẢI:

Điều kiện xác định: $x\ge -\dfrac{1}{2}$.

Ta có: $3x+3-2\sqrt{2x^2+5x+2}+2\left(\sqrt{x+2}\right)^3-(x+5)\sqrt{2x+1}=0$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\right)^2\left(\sqrt{2x+1}+2\sqrt{x+2}+1\right)=0$$

CHỦ ĐỀ 5: 1 NGHIỆM ĐƠN HỮU TỶ THAY VÀO CĂN VÔ TỶ

VÍ DỤ 1: Giải phương trình:

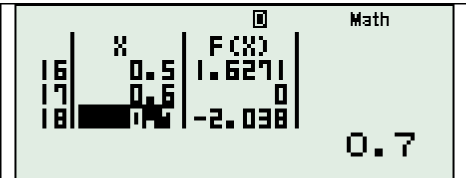
$$5x-15-6\sqrt{1+x}+12\sqrt{1-x}+15\sqrt{1-x^2}=0$$

KÍNH LÚP TABLE:

Sử dụng TABLE với:

$$F(x)=5x-15-6\sqrt{1+x}+12\sqrt{1-x}+15\sqrt{1-x^2}$$

Ta nhận thấy có nghiệm đơn $x=0.6=\frac{3}{5}$



Khi đó $\sqrt{1+x}=\frac{2\sqrt{10}}{5},\sqrt{1-x}=\frac{\sqrt{10}}{5}$. Như vậy nhân tử có dạng $\left(\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}\right)$.

Xét $A=\frac{5x-15-6\sqrt{1+x}+12\sqrt{1-x}+15\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}}$ CALC 1 được kết quả $-6-5\sqrt{2}$. Vậy A chứa $-5\sqrt{1+x}$.

Xét $A+5\sqrt{1+x}$ CALC -1 được $-6+5\sqrt{2}$ vậy $A+5\sqrt{1+x}$ chứa $5\sqrt{1-x}$.

Xét $A+5\sqrt{1+x}-5\sqrt{1-x}$ CALC 1000 được kết quả -6.

Vậy $A+5\sqrt{1+x}-5\sqrt{1-x}=-6\Leftrightarrow A=5\sqrt{1-x}-5\sqrt{1+x}-6$.

BÀI GIẢI:

Điều kiện xác định: $-1\le x\le 1$.

Ta có: $5x-15-6\sqrt{1+x}+12\sqrt{1-x}+15\sqrt{1-x^2}=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}\right)\left(5\sqrt{1-x}-5\sqrt{1+x}-6\right)=0$

CHỦ ĐỀ 6: 1 NGHIỆM ĐƠN HỮU TỶ THAY VÀO CĂN HỮU TỶ

VÍ DỤ 1: Giải phương trình:

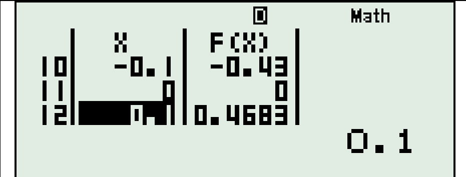
$$2x^2+x+(x-1)\sqrt{1-x^2}+(x-1)\sqrt{1-x}+2\sqrt{1+x}=0$$

KÍNH LÚP TABLE:

Sử dụng TABLE với:

$F(x)=2x^2+x+(x-1)\sqrt{1-x^2}+(x-1)\sqrt{1-x}+2\sqrt{1+x}$

Nhận xét: Nghiệm đơn duy nhất: $x=0$.



Với $x=0$, ta có $\sqrt{1+x}=\sqrt{1-x}=1$. Do đó nhân tử có dạng: $\left(\sqrt{1+x}+a\sqrt{1-x}-1-a\right)$.

Ta tìm số nguyên a, sao cho $F(x)$ chia hết cho $\left(\sqrt{1+x}+a\sqrt{1-x}-1-a\right)$ với mọi x.

Như vậy $F(1)=3+2\sqrt{2}$ sẽ chia hết cho $\left.\left(\sqrt{1+x}+a\sqrt{1-x}-1-a\right)\right|_{x=1}=\sqrt{2}-(a+1)$.

Khi đó $\left([3]^2-\left[2\sqrt{2}\right]^2\right)$ sẽ chia hết cho $\left([a+1]^2-\left[\sqrt{2}\right]^2\right)$.

Vậy 1 sẽ chia hết cho $\left(a^2+2a-1\right)$ khi $a^2+2a-1=\pm 1$. Vì a là nguyên nên ta tìm được $a=0\vee a=-2$. Chọn $a=-2$, ta có nhân tử $\left(\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}+1\right)$.

Xét $A=\dfrac{2x^2+x+(x-1)\sqrt{1-x^2}+(x-1)\sqrt{1-x}+2\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}+1}$ CALC 1 được $1+\sqrt{2}$ do đó A có chứa $\sqrt{1+x}$.

Xét $A-\sqrt{1+x}$ CALC 1 và CALC -1 đều thu được kết quả là 1 nghĩa là A chứa 1.

Xét $A-\sqrt{1+x}-1$ CALC -1 được kết quả là 0, đồng thời không còn chứa $\sqrt{1+x}$, do đó ta hiểu rằng $A-\sqrt{1+x}-1=(x+1)g(x)$.

Xét $\dfrac{A-\sqrt{1+x}-1}{x+1}$ CALC -1 được kết quả $\sqrt{2}$ nghĩa là $\dfrac{A-\sqrt{1+x}-1}{x+1}=\sqrt{1-x}$.

Vậy $A=\sqrt{1+x}+(x+1)\sqrt{1-x}+1$.

BÀI GIẢI:

Điều kiện xác định: $-1\le x\le 1$.

Ta có: $2x^2+x+(x-1)\sqrt{1-x^2}+(x-1)\sqrt{1-x}+2\sqrt{1+x}=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+(x+1)\sqrt{1-x}+1\right)=0$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN:

BÀI 1: Giải phương trình: $\left(x^2-1\right)\sqrt{x+1}-\left(x^2+1\right)\sqrt{x-1}-x^2+2=0$

Đáp số: $\left(x^2+\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-1\right)=0$

BÀI 2: Giải phương trình: $x+3+\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-3\sqrt{1-x^2}=0$

Đáp số: $\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(2\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}+1\right)=0$

Bài 3: Giải phương trình: $4x+3+2\sqrt{1-x^2}-4\sqrt{1+x}=0$

Đáp số: $\left(3\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-1\right)=0$

BÀI 4: Giải phương trình: $3x-10+3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}+4\sqrt{4-x^2}=0$

Đáp số: $\left(\sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x}\right)\left(2\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}+3\right)=0$

BÀI 5: Giải phương trình: $2x^2-2-x^2\sqrt{x+1}+2x\sqrt{x^2-1}-\left(x^2+x\right)\sqrt{x-1}=0$

Đáp số: $\left(2\sqrt{x^2-1}-x\sqrt{x+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=0$

BÀI 6: Giải phương trình: $x^2-2x-3+(2x+3)\sqrt{1-x^2}+(x-3)\sqrt{1+x}+(2x+3)\sqrt{1-x}=0$

Đáp số: $\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)^2\left(\sqrt{1-x}-2\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)=0$

BÀI 7: Giải phương trình: $x\sqrt{x^3-3x}+\sqrt{x^2-3}-x-3-\sqrt{x}=0$

Đáp số: $\left(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x}\right)\left((x+1)\sqrt{x}+\sqrt{x^2-3}+1\right)=0$

BÀI 8: Giải phương trình: $x^2-9x+8+\sqrt{6x^2-x-1}=\left(2x^2-1\right)\sqrt{2x-1}-\left(x^2+2\right)\sqrt{3x+1}$

Đáp số: $\left(2\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x+1}-1\right)\left(3\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x+1}+x^2+1\right)=0$

BÀI 9: Giải phương trình: $5x+20+14x\sqrt{x+2}=8\sqrt{4x^2+9x+2}-(4x-10)\sqrt{4x+1}$

Đáp số: $\left(\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+2}-1\right)^2\left(2\sqrt{4x+1}+3\sqrt{x+2}+3\right)=0$

BÀI 10: Giải phương trình: $8x-24+(x+8)\sqrt{x+2}=2\sqrt{2x^2+x-6}+8\sqrt{2x-3}$

Đáp số: $\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}-1\right)^2\left(3\sqrt{x+2}+2\sqrt{2x-3}+2\right)=0$